3. ESTIMACIÓN DE PARAMETROS

3.1 MODELOS ENTRADA-SALIDA

- Como alternativa a los esquemas de diagnóstico de fallas basados en estimación de estado, se han desarrollado esquemas basados en estimación de parámetros, en los cuales los residuos se obtienen a partir de la diferencia entre el vector de parámetros de un modelo del sistema correspondiente a una situación de operación normal y el vector de parámetros correspondiente a una situación de operación con falla. Para aplicar estos esquemas es necesario estimar en línea y en tiempo real los parámetros del modelo.

- Para esta aplicación se ofrecen dos alternativas de estructura del modelo:

  - Un modelo formulado en ecuación de estado
  - Un modelo formulado como relación entrada salida, empleando funciones de transferencia.

- Los modelos formulados en ecuación de estado presentan como desventaja que el problema de estimación de parámetros da origen en general a una relación no lineal entre variables medidas y parámetros, si bien existen formas canónicas especiales en que esta relación es lineal. En cambio, el problema de estimación de parámetros originado en un modelo entrada-salida lineal genera también una relación lineal entre variables medidas y parámetros.

- Los modelos entrada-salida que se utilizan para estimación de parámetros presentan en general dos entradas: la variable manipulada u y una perturbación e que representa simultáneamente perturbaciones no medidas y errores de modelación. Por simplicidad generalmente se considera que e es un ruido blanco gaussiano de varianza desconocida.

- Si el modelo entrada-salida es lineal y de tiempo discreto, su estructura general es:

$$A(q)y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}e(k)$$

$$e(k) \sim N(0, \sigma^2)$$

En esta expresión q es el operador adelanto en el tiempo, esto es:

$$q\,x(k) = x(k+1) \qquad\qquad q^{-1}x(k) = x(k-1)$$

A su vez, $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$, $F(q)$ son los polinomios:

$$A(q) = 1 + a_1\, q^{-1} + \ldots + a_{n_a} q^{-n_a}$$

$$B(q) = b_1 + b_2\, q^{-1} + \ldots + b_{n_b} q^{-n_b+1}$$

El modelo queda definido por la forma de la ecuación, los parámetros n_a, n_b, n_c, n_d, n_f, y el tiempo de retardo d y los coeficientes $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}, \{d_i\}, \{f_i\}$.

- El término "identificación de estructura" se refiere a definir la forma de la ecuación y asignar un valor a los parámetros n_a, n_b, n_c, n_d, n_f y el tiempo de retardo d.

- El término "estimación de parámetros" se refiere a asignar un valor a los coeficientes $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, $\{c_i\}$, $\{d_i\}$, $\{f_i\}$.

- Existen diferentes casos especiales de la ecuación general entrada-salida, los que se sintetizan en la Tabla 3.1.

- Los modelos más utilizados en diagnóstico de fallas corresponden a los modelos ARX (Auto Regressive with Exogenous input) y ARMAX (Auto Regressive with Moving Average and Exogenous input).

- Los modelos ARIX y ARIMAX se emplean preferentemente en control predictivo. El polinomio

$$\Delta = 1 - q^{-1}$$

incorpora una integración que modifica las características estadísticas del ruido $e(k)$.

Clase de modelo	Representación
AR	$A(q)y(k) = e(k)$
ARX	$A(q)y(k) = B(q)u(k) + e(k)$
ARMA	$A(q)y(k) = C(q)e(k)$
ARMAX	$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)e(k)$
ARIX	$A(q)y(k) = B(q)u(k) + \frac{1}{\Delta}e(k)$
ARIMAX	$A(q)y(k) = B(q)u(k) + \frac{C(q)}{\Delta}e(k)$
ARARX	$A(q)y(k) = B(q)u(k) + \frac{1}{D(q)}e(k)$
ARARMAX	$A(q)y(k) = B(q)u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}e(k)$
Output Error	$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + e(k)$
Box-Jenkins	$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}e(k)$
Caso General	$A(q)y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}e(k)$

Tabla 3.1: Representaciones de modelos entrada-salida

MODELOS ENTRADA-SALIDA NO LINEALES

- Un modelo NARMAX (Nonlinear ARMAX) presenta la siguiente estructura:

$$y(k) = f\left[y(k-1),\ldots,y(k-n_a),u(k),\ldots,u(k-n_b+1),e(k-1),\ldots,e(k-n_c)\right] + e(k)$$

En donde *f* es una función no lineal.

Si un modelo NARMAX es lineal en los parámetros, también es posible aplicar algunos de los métodos que se estudiarán en este capítulo.

3.2 METODO DE MINIMOS CUADRADOS

- Varios de los modelos incluidos en la Tabla 3.1, en particular los modelos ARX, pueden reformularse como una relación lineal en los parámetros:

$$y(k) = \phi^T(k)\theta + e(k)$$

$$e(k) \sim N(0, \sigma^2)$$

En un modelo ARX el vector de mediciones $\phi(k)$ y el vector de parámetros *θ(k)* quedan definidos por:

$$\phi^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-n_a), u(k-d), \dots, u(k-d-n_b+1)]$$

$$\theta^T = [a_1, \dots, a_{na},\ b_1, \dots, b_{nb}]$$

- El método de estimación más conocido corresponde a la regresión lineal o mínimos cuadrados ("Ordinary Least Squares"), según el cual los parámetros se determinan minimizando:

$$J_N(\theta) = \sum_{k=1}^{N} e^2(k) = \sum_{k=1}^{N} [y(k) - \phi^T(k)\theta)]^2$$

Se obtiene:

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{k=1}^{N} \phi(k) \phi^T(k) \right)^{-1} \sum_{k=1}^{N} \phi(k)\, y(k)$$

Para que la solución exista, la matriz $\Phi(k)$ debe ser invertible, con

$$\Phi(k) = \sum_{k-1}^{N} \Phi(k)\, \phi^T(k)$$

- La matriz $\Phi(k)$ es invertible si la entrada *u(k)* cumple condiciones especiales que se sintetizan en el término "excitación persistente". Esta condición se cumple, por ejemplo, si *u(k)* es un ruido blanco o una señal PRBS (Pulse Random Binary Sequence), independiente de *e(k)*.

Si $e(k)$ es un ruido blanco gaussiano de desviación estandar σ, entonces $y(k)$ es un proceso estocástico y el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ será una variable aleatoria.

Se puede demostrar que si $\phi(k)$ y $e(k)$ son estadísticamente independientes, entonces se obtiene una estimación no sesgada que cumple:

$$E\left[\hat{\theta}(k)\right] = \theta$$

$$E\left[\left(\theta - \hat{\theta}\right)\left(\theta - \hat{\theta}\right)^T\right] = \sigma^2 \Phi^{-1}$$

MINIMOS CUADRADOS CON PONDERADORES

- En aplicaciones a diagnóstico de fallas es necesario dar mayores pesos a los errores recientes y menores pesos a los errores más antiguos. Para ello se modifica la función a minimizar, y se obtiene una expresión diferente para θ:

$$J_N(\theta) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left[y(k) - \phi^T(k)\theta\right]^2$$

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi(k)\phi^T(k)\right)^{-1} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi(k)\, y(k)$$

- Generalmente se emplean expresiones exponenciales para los coeficientes α_k:

$$\alpha_k = \lambda^{N-k}$$

  En este caso el método de estimación se denomina "mínimos cuadrados con factor de olvido constante".

VARIABLES INSTRUMENTALES

- Si *u(k)* y *e(k)* están correlacionados, al emplear el método de mínimos cuadrados se obtienen estimaciones sesgadas. Para evitarlo, se puede utilizar en vez de $\phi(k)$ variables instrumentales $\overline{\phi}(k)$ que deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\overline{E}\left\{\overline{\phi}(k)\phi^{T}(k)\right\} \text{ invertible}$$

$$\overline{E}\left\{\overline{\phi}(k)\, e(k)\right\} = 0$$

La estimación $\hat{\theta}$ se obtiene entonces como solución de la ecuación:

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{\phi}(k)\left[y(k) - \phi^{T}\theta(k)\right] = 0$$

Se deduce:

$$\theta = \left(\sum_{k=1}^{N} \overline{\phi}(k)\phi^{T}(k)\right)^{-1} \sum_{k=1}^{N} \phi(k)\, y(k)$$

3.3 IDENTIFICACION DE ESTRUCTURA

- Para determinar los órdenes de los polinomios y el tiempo de retardo se puede simular las diferentes estructuras y seleccionar la más apropiada, utilizando criterios objetivos como los siguientes:

  - Criterio AIC (Akaike's Information Criterion):

$$AIC = N \ \mathrm{Ln} \ \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon(k)^2 \right) + \beta v$$

v: Número de parámetros que se estiman

β: Coeficiente de sintonía

  - Criterio BIC (Bayesian Information Criterion):

$$LILC = N \ \mathrm{Ln} \ \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon(k)^2 \right) + v \ \mathrm{In} \ N$$

  - Criterio FPE (Final Prediction Error):

$$FPE = N \ \mathrm{Ln} \ \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon(k)^2 \right) + N \ \mathrm{In} \ \frac{N+v}{N-v}$$

3.4 METODO DE MINIMOS CUADRADOS RECURSIVO

- El método de mínimos cuadrados ordinario requiere una memoria que aumenta con el número *N* de muestras, ya que se requiere almacenar el vector $\phi(k)$ de dimensión proporcional a *N*. También aumenta la dimensión *N*N* de la matriz Φ que se debe invertir.

- Existen dos soluciones al problema:

  - Utilizar una ventana de datos fija
  - Utilizar un algoritmo recursivo (RLS, Recursive Least Squares).

- El algoritmo RLS ofrece más posibilidades y ha sido estudiado extensamente. Para su derivación se utiliza el siguiente Lema de Inversión del álgebra matricial:

$$(A+BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left[I + CA^{-1}B\right]^{-1}CA^{-1}$$

- El Lema se aplica intentando relacionar entre sí las soluciones de los siguientes problemas de estimación que se formulan para *k-1* y para *k* muestras:

$$min \quad J_{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \left[y(j) - \phi^T(j)\theta\right]^2 \quad \rightarrow \quad \hat{\theta}(k-1)$$

$$min \quad J_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \left[y(j) - \phi^T(j)\theta\right]^2 \quad \rightarrow \quad \hat{\theta}(k)$$

- Esta nueva formulación permite considerar factores de olvido variables, es decir:

$$\alpha_j = \lambda_j^{N-j}$$

- Se obtienen las siguientes ecuaciones de recurrencia:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + H(k)\left[y(k) - \phi^T(k)\hat{\theta}(k-1)\right]$$

$$H(k) = \frac{P(k-1)\,\phi(k)}{\lambda_{k-1} + \phi^T(k)P(k-1)\phi(k)}$$

$$P(k) = \frac{1}{\lambda_{k-1}}\left(P(k-1) - \frac{P(k-1)\,\phi(k)\phi^T(k)P(k-1)}{\lambda_{k-1} + \phi^T(k)P(k-1)\phi(k)} \right)$$

- El algoritmo necesita condiciones iniciales:

$$\hat{\theta}(0) = \theta_0 \qquad\qquad P(0) = p_0\, I$$

A p_0 se asigna un valor elevado $\left(p_0 \approx 10^{\,6}\right)$.

- Las expresiones obtenidas son muy similares a las del Filtro de Kalman, ya que se puede demostrar que este soluciona también el problema de estimación de parámetros.

- La matriz $P(k)$ está relacionada con la covarianza del error de estimación y satisface:

$$P^{-1}(k) = \lambda_{k-1}P^{-1}(k-1) + \phi(k)\phi^T(k)$$

- A P^{-1} se le denomina matriz de información.

- Existen diferentes variantes del método RLS, que surgen de los problemas que originan su aplicación en casos reales.

- Especialmente en procesadores digitales con longitud de palabra restringida pueden aparecer problemas de convergencia cuando el número de iteraciones es muy elevado. Para evitarlos se acostumbra a utilizar la factorización matricial denominada Transformación de Bierman:

$$P(k) = U(k)\, D(k)\, U^T(k)$$

  En esta expresión $U(k)$ es una matriz triangular superior y $D(k)$ es diagonal.

- Un factor de olvido $\lambda=1$ implica que $P(k)$ y $H(k)$ tenderán a cero y el algoritmo de estimación no responderá a cambios de parámetros o no estimará adecuadamente parámetros variantes en el tiempo (pérdida de actividad del algoritmo). Para evitarlo se puede utilizar $\lambda < 1$ o bien reinicializar la matriz de covarianza $P(k)$.

- A su vez, un factor de olvido pequeño ($\lambda = 0,9$ por ejemplo) puede originar parámetros muy variables. Una solución es utilizar factor de olvido variable, por ejemplo el método de Fortescue. De acuerdo a este método, $\lambda(k)$ se determina de forma que:

$$Traza\ P(k) = \sum\nolimits_0$$

- Para más detalles sobre estimación RLS se recomienda revisar el capítulo IV de Araya, J. F., "Estimación de parámetros para su aplicación a detección y diagnóstico de fallas", Tesis de Magister en Ciencias de la Ingeniería, Septiembre 2004.

3.5 MINIMOS CUADRADOS EXTENDIDO

- En un modelo ARMAX, la relación entrada-salida

$$A(q)\,y(k) = B(q)\,u(k-d) + C(q)\,e(k)$$

se puede expresar como:

$$y(k) = \phi^T(k)\theta + e(k)$$

en que:

$$\phi^T(k) = [-y(k-1),\ldots,\ -y(k-n_a),\ u(k-d),\ldots,u(k\text{-}\ d\ \text{-}\ n_b+1),\ e(k-1),\ldots,\ \ e(k\text{-}n_c)]$$

$$\theta^T = [a_1,\ldots\ a_{na},\ b_1,\ldots,b_{nb},\ c_1,\ldots,\ c_{nc}]$$

- En este caso $\phi(k)$ incluye también los errores $e(k-1),\ldots,\ e(k\text{ - }n_c)$ que no se miden y que deben ser estimados. Para ello se utilizan las expresiones:

$$\hat{e}(j) = y(j) - \phi^T(j)\,\hat{\theta}(j)$$

con $j = 1,\ldots,n_c$.

- Como consecuencia de esta aproximación, generalmente la estimación de los coeficientes $\{c_i\}$ presenta mayor varianza que la estimación de los coeficientes $\{a_i\},\ \{b_i\}$.

3.6 FILTRO DE KALMAN PARA ESTIMAR PARÁMETROS

- Si la ecuación entrada-salida se reformula como ecuación de estado, con el estado igual al vector de parámetros, y se considera que el vector de parámetros puede variar en el tiempo por efecto de un ruido $\eta(k)$, entonces:

$$\theta(k+1) = \theta(k) + \eta(k)$$

$$y(k) = \phi^T(k)\, x(k) + e(k)$$

- El modelo en variables de estado corresponde al de un sistema lineal variante en el tiempo, por lo cual puede aplicarse el Filtro de Kalman. Para ello se requiere conocer las covarianzas de $\eta(k)$ y $e(k)$.

- El Filtro de Kalman, en su versión extendida para sistemas no lineales, puede utilizarse para estimar conjuntamente estado y parámetros, en el caso que estos parámetros no se conozcan. Para ello se considera como nuevo vector de estado:

$$z(k) = [x^T(k)\ \theta^T(k)]^T$$

en que:

$$x(k+1) = A(\theta)\, x(k) + B(\theta)\, u(k) + w(k)$$

$$\theta(k+1) = \theta(k) + \eta(k)$$

$$y(k) = C(\theta)\, x(k) + e(k)$$

- Se obtiene:

$$z(k+1) = F\,(z(k), u(k), w(k), \eta(k))$$

$$y(k) = G\,(z(k), e(k))$$

- Para estimar el estado aumentado, formado por el vector de estado $x(k)$ y el vector de parámetros $\theta(k)$, se puede aplicar el Filtro de Kalman Extendido.

3.7 HERRAMIENTAS PARA ESTIMACION DE PARAMETROS

- En Internet existe abundante información sobre:

    - Kalman Filter
    - Parameter Estimation
    - System Identification

- También existen varias herramientas computacionales de apoyo, por ejemplo:

    - Kalman Filter Toolbox
    - System Identification Toolbox
    - Frequency Domain System Identification Toolbox

- Más recientemente han sido desarrolladas también herramientas para estimar parámetros en sistemas no lineales, por ejemplo:

    - The Nonlinear System Identification Toolbox
    - The NNSYSID Toolbox.